© Р.Г. Петроченков, С.Х. Абсатаров, 2008

УДК 622.357.4

Р.Г. Петроченков, С.Х. Абсатаров

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ УПРУГИХ СВОЙСТВ АНИЗОТРОПНЫХ МИНЕРАЛЬНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ЖЕЛЕЗИСТЫХ КВАРЦИТОВ КАК КВАЗИИЗОТРОПНЫХ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Семинар № 1

Для прослоев слоистых железистых кварцитов со структурой типа статистических механических смесей (минеральные составляющие равноправны друг другу в геометрическом смысле) и матричной структуры (с большими концентрациями включений и хаотичным их распределением в матрице) точных решений по нахождению для них усредняющих функций упругих характеристик до настоящего времени все еще не получено. Трудности получения усредняющей функции для таких систем традиционными методами хорошо изложены в работе [1]. Для мономинеральных поликристаллов наиболее существенные с практической точки зрения результаты были получены для упругих свойств на основании работ Рейсса [2] и Фойхта [3]. Первый при выводе усредняющей функции для упругих характеристик мономинеральных поликристаллов принимал, что напряжения по всем площадкам и направлениям в поликристалле одинаковы. Второй основывался на пред-положении о том, что относительные деформации в поликристалле однородны. Как показывают экспериментальные исследования, значения упругих свойств мономинеральных поликристаллов в действительности лежат в пределах значений, рассчитанных по формулам, выведенными Рейссом и Фойхтом. Это указывает на то, что предположения об однородности напряжений или относительных деформаций в гетерогенных средах с нерегулярной структурой несправедливы, что и доказывается многочисленными экспериментальными исследованиями.

Распространение методов Рейсса и Фойхта, предназначенных для вычисления модулей упругости мономинеральных поликристаллов, на гетерогенные среды со структурой типа статистических механических смесей с изотропными составляющими приводит соответственно к формулам гармонического и арифметического средневзвешенных. Данные формулы получаются при выводе, например, модуля Юнга для слоистых гетерогенных сред с «несвязанными» слоями в случае действия нагрузки перпендикулярно (напряжения однородны) и параллельно (деформации однородны) слоям. Позднее Хилл [4] показал, что при выводе усредняющих функций для упругих характеристик мономинеральных поликристаллов можно исходить из гипотезы о равенстве макроскопической величины плотности энергии деформации достаточно большого объема гетерогенного материала средней величине плотности энергии деформации по всем элементам этого объема. Тогда значения упругих констант, в частности, модулей Юнга (E), сдвига (G), модуля объемной упругости

Таблица 1

Упругие характеристики основных минералов прослоев слоистых железистых кварцитов (K, G, λ, M, E, 10^4 МПа)

Метод усреднения	Минерал	Упругие параметры				*Технические* упругие характеристики	
		K	**G**	***K***	**M**	**E**	**ν**
Фойгт [3]	Кварц	3,86	4,76	0,687	10,207	10,12	0,0631
	Гематит	9,84	9,43	3,553	22,41	21,44	0,13684
	Магнетит	16,17	9,17	10,06	28,40	23,14	0,22565
Рейсе [2]	Кварц	3,50	4,15	1,067	9,367	9,13	0,1023
	Гематит	9,80	9,14	3,707	21,99	20,92	0,1166
	Магнетит	16,17	9,12	10,09	28,36	23,03	0,22708
Хилл [4]	Кварц	3,83	4,46	0,84	9,78	9,64	0,08
	Гематит	9,82	9,28	3,74	23,30	21,17	0,14
	Магнетит	16,17	9,14	10,08	28,36	23,08	0,26
По работе [6, с. 7—13]	Кварц	3,676	4,445	0,713	9,6027	9,505	0,069
	Гематит	9,82	9,284	3,63	22,20	20,9	0,125
	Магнетит	16,17	9,130	10,08	28,34	23,05	0,262

(K), модуля продольной упругости (M), параметра Ламе (λ) и коэффициента Пуассона (ν) гетерогенных сред лежат где-то в интервале между значениями, полученными по методу Рейсса и Фойхта. Однако конкретные виды усредняющих функ-ций для указанных упругих характеристик Хиллом получены не были. В той же работе он предположил, что наиболее вероятными значениями модулей упругости мономинерального поликристалла являются среднеариф-метические их значения, определенные по Рейссу и Фойхту.

Применительно к двухкомпонентным гетерогенным средам с квазиизотропными составляющими усреднение по Хиллу приводит к среднему значению между формулами арифметического и гармонического средневзвешенного. Этот метод расчета упругих характеристик мономинеральных поликристаллов получил название усреднение по методу Фойхта - Рейсса - Хилла. В настоящее время он нашел широкое практическое применение, например, при расчете упругих свойств мономинеральных поликристаллов — квазиизотропных минеральных составляющих горных пород [5 и др.]. Однако этот метод не совсем корректен. Использование усредняющих функций, полученных для прямых (модули упругости) и обратных (коэффициенты податливости) величин, дают при расчетах с применением обобщенного закона Гука раз-личные конечные результаты [6, с. 57—68; 7, с. 7—12].

Слоистые железистые кварциты в основном состоят из кварца и рудных минералов магнетита или гематита. Все эти минералы анизотропны, но в отдельных прослоях их ориентировка, как правило, хаотична. В табл. 1 при-ведены упругие характеристики этих минералов, как квазиизотропных тел, взятых в основном из работы [5].

Модули упругости двухкомпонентных прослоев по модели сфера (включение) в сфере (матрица)

Модуль объемной упругости матричных сред. При моделировании структуры двухкомпонентного прослоя железистых кварцитов с изотропными или квазиизотропными составляющими может быть использована модель — сфера (включение), заключенная в другую сферу (матрицу). Хотя эта модель не отражает структуру большинства реальных гетерогенных сред, она может быть использована для

определения предельных значений (вилки) модулей упругости двухкомпонентных гетерогенных сред. Для такой модели, если первая составляющая является матрицей, а вторая включением, накладывая простые граничные условия и решая трехмерную задачу теории упругости, получена следующая формула для расчета модуля объемной упругости гетерогенной среды (прослоя железистых кварцитов) [8, 9]:

$$K_{\Sigma} = \left[K_1 m_1 / (3K_1 + 4G_1) + K_2 m_2 / (3K_2 + 4G_1)\right] / \left[m_1 / (3K_1 + 4G_1) + m_2 / (3K_2 + 4G_1)\right], \quad (1)$$

где K и G — модули объемной упругости и сдвига минеральных составляющих прослоев; m — относительное объемное содержание минеральных составляющих прослоев.

Индексы 1 и 2 относятся к нерудному минералу (кварц) и рудным минералам (магнетит, гематит) соответственно.

Формулу (1) можно преобразовать к более удобному виду

$$K_{\Sigma матр-1} = \left[3K_1K_2 + 4G_1(K_1m_1 + K_2m_2)\right] / \left[3(K_2m_1 + K_1m_2) + 4G_1\right]. \quad (2)$$

Эта формула предназначена для «нерудных» прослоев слоистых железистых кварцитов, где «рудные» минералы являются включениями.

Если матрицу (индекс — 1) и включение (индекс — 2) гетерогенной среды поменять местами, то получим следующую формулу для расчета модуля объемной упругости прослоев железистых кварцитов

$$K_{\Sigma матр-2} = \left[3K_1K_2 + 4G_2(K_1m_1 + K_2m_2)\right] / \left[3(K_2m_1 + K_1m_2) + 4G_2\right]. \quad (3)$$

Эта формула предназначена для «рудных» прослоев железистых кварцитов, где «нерудные» минералы являются включениями.

Расчетные значения модуля объемной упругости в основном кварцевых прослоев железистых кварцитов, где матрицей является кварц, а рудные минералы являются включениями, по формуле (2) приведены в табл. 2. Там же приведены расчетные по формуле (3) значения модуля объемной упругости рудных прослоев железистых кварцитов, где матрицей является рудные минералы, а кварц является включением.

Модуль сдвига матричных сред. Оценка границ для модуля сдвига гетерогенных сред имеется в обзорной работе [9, с. 81—83]. Формула, характеризующая вилку для оценки модуля сдвига двухкомпонентной гетерогенной среды (индекс - 1 относится к матрице, а индекс - 2 относится к включению), имеет вид

$$\frac{G_1 + m_2}{\left[\dfrac{1}{(G_2 - G_1)} + \dfrac{6(K_1 + 2G_1)m_1}{5(3K_1 + 4G_1)G_1}\right]} \geq G_{\Sigma} \geq \frac{G_2 + m_1}{\left[\dfrac{1}{(G_2 - G_1)} + \dfrac{6(K_2 + 2G_2)m_2}{5(3K_2 + 4G_2)G_2}\right]}. \quad (4)$$

Если первая составляющая двухкомпонентного прослоя железистых кварцитов (например, кварц) является матрицей значение модуля сдвига «нерудного» прослоя на основании выражения (4) можно выразить формулой:

$$G_{\Sigma матр.1} = \frac{G_1\left\{G_1m_1 + G_2\left[15(1 - н_1)/(7 - 5н_1) - m_1\right]\right\}}{\left\{\begin{array}{l} G_1\left[1 + 2(4 - 5н_1)m_2/(7 - 5н_1)\right] + \\ +2G_2m_1(4 - 5н_1)/(7 - 5н_1) \end{array}\right\}}. \quad (5)$$

Таблица 2

Сравнение расчетных зависимостей модуля объемной упругости (10 МПа) двухкомпонентных «рудных» и «нерудных» прослоев железистых кварцитов по модели сфера в сфере

Объемное относительное содержание включения											Формула
0,0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	
Матрицей является кварц, включение — магнетит											
3,675	4,25	4,90	5,63	6,48	7,46	8,60	9,976	11,6	13,61	16,17	(2)
Матрицей является кварц, включение — гематит											
3,675	4,04	4,44	4,87	5,34	5,85	6,41	7,02	7,70	8,45	9,820	(2)
Матрицей является магнетит, включение — кварц											
16,17	14Д	12,3	10,7	9,37	8,15	7,06	6,09	5,21	4,40	3,675	(3)
Матрицей является гематит, включение — кварц											
9,820	8,56	7,87	7,23	6,63	6,06	5,53	5,03	4,55	4,10	3,675	(3)

Таблица 3

Сравнение расчетных зависимостей модуля сдвига (10^4МПа) «рудных» и «нерудных» прослоев слоистых железистых кварцитов по модели сфера в сфере

Объемное относительное содержание включения											Формула
0,0	**0,1**	**0,2**	**0,3**	**0,4**	**0,5**	**0,6**	**0,7**	**0,8**	**0,9**	**1,0**	
Матрицей является кварц, включение — магнетит											
4,445	4,70	5,10	5,46	5,85	6,28	6,75	7,26	7,82	8,44	9,130	(5)
Матрицей является кварц, включение — гематит											
4,445	4,77	5,11	5,48	5,98	6,33	6,81	7,34	7,92	8,57	9,285	(5)
Матрицей является магнетит, включение — кварц											
9,13	8,53	7,96	7,43	6,93	6,46	6,01	5,59	5,19	4,81	4,445	(6)
Матрицей является гематит, включение — кварц											
9,285	8,65	8,06	7,50	6,98	6,49	6,03	5,60	5,19	4,81	4,445	(6)

Если вторая составляющая двухкомпонентного прослоя железистых кварцитов является матрицей предельное значение модуля сдвига «рудного» прослоя на основании выражения (4) можно выразить следующей формулой:

$$G_{\sum матр.2} = \frac{G_2\left\{G_2 m_2 + G_1\left[15(1-н_2)/(7-5н_2)-m_2\right]\right\}}{\left\{\begin{array}{l} G_2\left[1+2(4-5н_2)m_1/(7-5н_2)\right]+ \\ +2G_1 m_2(4-5н_2)/(7-5н_2) \end{array}\right\}}. \quad (6)$$

Расчетные значения модуля сдвига кварцевых прослоев слоистых железистых кварцитов по формулам (5), где матрицей является кварц, а рудные минералы являются включениями, приведены в табл. 3. Там же приведены расчетные значения модуля сдвига рудных прослоев слоистых железистых кварцитов по формулам (6), где матрицей является рудные минералы, а кварц является включением.

В табл. 2 и 3 не все расчетные значения K и G имеют практическое значение, так как включают такие содержания минеральных составляющих, которые не

встречаются в природе, однако они интересны в методологическом смысле.

Сравнение расчетных зависимостей модуля сдвига (10^4 МПа) «рудных» и «нерудных» прослоев слоистых железистых кварцитов по модели сфера в сфере приведено в табл. 3.

Приближенная оценка модуля сдвига матричных сред. Легко убедиться, что при коэффициенте Пуассона матрицы или включения равном 0,2 значение 15(1 – ν)/(7 – 5ν) = 2, а значение 2(4 – 5ν)/(7 – 5ν) = 1. В широком диапазоне значений коэффициентов Пуассона матрицы или включения эти параметры для практических расчетов можно принять постоянными и равными соответственно 2 и 1 [7, с. 51 – 52]. Тогда приближенно выражения для оценки модуля сдвига матричных сред выразятся:

если матрицей является первая составляющая (например, кварц), то на основании формулы (3.2.5) получим:

$$G_{\sum матр.1пр} \approx G_1\left[G_1 \cdot m_1 + G_2\left(1+m_2\right)\right] / \left[G_1\left(1+m_2\right) + G_2 \cdot m_1\right] = G_{\sum гар}\left(G_{\sum ар} + G_2\right) / \left(G_{\sum гар} + G_2\right); \quad (7$$

если матрицей является вторая составляющая (рудный минерал), то на основании формулы (3.2.6) получим

$$G_{\sum матр.2пр} \approx G_2\left[G_2 \cdot m_2 + G_1\left(1+m_1\right)\right] / \left[G_2\left(1+m_1\right) + G_1 \cdot m_2\right] = G_{\sum гар}\left(G_{\sum ар} + G_1\right) / \left(G_{\sum гар} + G_1\right). \quad (8)$$

Формулы (7) и (8) обеспечивают расчеты модулей сдвига прослоев слоистых железистых кварцитов с достаточной для практики точностью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Stenberg E., Sadovsky M.A.* On the Axisumme. Problem of the Theory of Elasticty for an Infinite Region Containing Two Spherical Cavities. — Journal of Applier Mechanic. Vol. 19, Trans. ASME, Vol. 74, 1952, p. 19.
2. *Reuss A.* Berechung der Fliebgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitatsbedingung fur Einkristalle. — Zs. Angew. Math. und Mech., 1929, Bd 9, H. 1, s 49—58.
3. *Voight W.* Lehrbuch der Kristallphysik. — Berlin: Teubner, 1928, S. 962.
4. *Hill R.* The Elastic Behavior of a Crystalline Aggregate. — Proc. Phys. Soc., 1952, vol. A65, Pt 5, n 389 A, p/ 349 — 354.
5. *Беликов Б.П., Александров К.С., Рыжова Т.В.* Упругие свойства породообразующих минералов и горных пород. — М.: Наука, 1970, 275с.
6. *Петроченков Р.Г.* Строительные ком-позиционные материалы с оптимальными свойствами на основе отходов горного производства. Часть 1. — М.: МГГУ, 1994, 114 с.
7. *Петроченков Р.Г.* Оценка физико-технических свойств горных пород и строительных композитов на их основе. Учебное пособие. Часть 2. Деформационные свойства горных пород и композитов в квазиизотропном приближении свойств их составляющих. — М.: МГГУ, 2000, 111с.
8. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. — М.: Мир, 1982, 334 с.
9. *Сендецки Дж.* Упругие свойства композитов. — В кн.: Композиционные материалы. Механика композиционных материалов, т. 2. — М.: Мир, 1973, с. 61 — 101. ГИАБ

Коротко об авторах

Петроченков Р.Г. – Московский государственный горный университет.
Абсатаров С.Х. – ЛГОК «Дорстройщебень.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 1 симпозиума «Неделя горняка-2007».
Рецензент д-р техн. наук, проф. *А.М. Гальперин.*