УДК 51

А.Э. Адигамов, А.В. Юденков, Е.Ю. Скородулина
М.А. Юденкова

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ОСНОВНЫМ ЗАДАЧАМ УПРУГОСТИ ДЛЯ БИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Основные определения

Бианалитические функции являются естественным обобщением аналитических функций. Основная область их применения – плоская теория упругости однородного тела (см. например [4]).

Определение 1. Функция $F^+(z)$ называется бианалитической в конечной области D^+, если она представима в виде:

$$F^+(z) = \varphi_0^+(z) + \overline{z}\,\varphi_1^+(z), \qquad (1)$$

где $\varphi_0^+(z)$ и $\varphi_1^+(z)$ – аналитические в области D^+ функции, $\overline{z} = x - iy$.

Функция $F^-(z)$ называется бианалитической в бесконечной области D^-, если она представлена в виде:

$$F^-(z) = \varphi_0^-(z) + \overline{z}\cdot z^{-2}\cdot\varphi_1^-(z), \qquad (2)$$

где $\varphi_0^-(z)$ и $\varphi_1^-(z)$ – аналитические в области D^- функции.

Известно, что основные задачи теории упругости можно представить в виде краевых задач для бианалитических функций. Например, математическую модель первой основной задачи можно сформулировать следующим образом.

Найти неизвестную бианалитическую функцию $F(z) = \varphi_0(z) + \overline{z}\varphi_1(z)$ в области D, ограниченной гладким контуром L, по краевым условиям:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'(t) + \overline{t}\varphi_1'(t) + \varphi_1(t) = \\ &= -\overline{\left[\varphi_1'(t) + \overline{t}\,\varphi_1'(t) + \varphi_1(t)\right]} + q_1(t), \\ &\varphi_0'(t) + \overline{t}\varphi_1'(t) - \varphi_1(t) = \\ &\overline{\left[\varphi_1'(t) + \overline{t}\,\varphi_1'(t) - \varphi_1(t)\right]} + q_2(t), \end{aligned} \qquad (3)$$

2. Теорема единственности для бианалитических функций

В теории аналитических функций хорошо известен тот факт, что если аналитическая функция обращается в ноль на некотором контуре плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, то она является тождественным нулём на всей плоскости.

Такое утверждение называется теоремой единственности для аналитической функции. С точки зрения краевых задач можно утверждать, что задача $\Phi(t) = 0,\ t \in L$ не имеет нетривиальных решений.

Для бианалитической функции такое утверждение неверно.

Рассмотрим, например функцию $F(z) = 1 - z \cdot \bar{z}$. Данная функция обращается в ноль на единичной окружности $\Gamma(\Gamma : \sigma \in F, \quad \sigma \cdot \bar{\sigma} = 1)$, однако не является тождественным нулём на всей плоскости комплексного переменного.

Таким образом, краевая задача для бианалитических функций

$$F(t) = 0, \quad t \in L \tag{4}$$

может иметь нетривиальное решение.

В краевой задаче (5) имеется только одно условие, а для однозначного решения необходимо два независимых условия.

Как задать эти условия? Очевидно, что возможны различные варианты. Рассмотрим один из них.

Пусть некоторая бианалитическая функция обращается в ноль на двух концентрических окружностях, одна из которых имеет радиус $R_1 = 1$, а другая $-0 < R_2 < 1$.

Запишем следующие граничные условия:

$$F(t_1) = 0, \quad t_1 \in L_1$$

$$F(t_2) = 0, \quad t_2 \in L_2 \tag{5}$$

Воспользовавшись представлением (2) получим:

$$\varphi_0(t_1) + \overline{t_1}\varphi_1(t_1) = 0$$

$$\varphi_0(t_2) + \overline{t_2}\varphi_1(t_2) = 0 \tag{6}$$

Заметим, что на окружностях L_1 и L_2 выполняются условия:

$$\overline{t_1} = \frac{1}{t_1}, \quad \overline{t_2} = \frac{R_2^2}{t_2}. \tag{7}$$

Пусть

$$\varphi_0(z) = a_0^0 + a_1^0 z + a_2^0 z^2 + \ldots + a_n^0 z^n + \ldots$$

$$\varphi_1(z) = a_0^1 + a_1^1 z + a_2^1 z^2 + \ldots + a_n^1 z^n + \ldots \tag{8}$$

Тогда, учитывая условия (8) получим, что для выполнения краевых условий необходимо и достаточно, чтобы выполнялись требования:

$$\begin{cases} a_0^1 = 0 \\ \begin{cases} a_0^0 + a_1^1 = 0 \\ a_0^0 + R_2^2 a_1^1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a_1^0 + a_2^1 = 0 \\ a_1^0 + R_2^2 a_2^1 = 0 \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \begin{cases} a_{n-1}^0 + a_n^1 = 0 \\ a_{n-1}^0 + R_2^2 a_n^1 = 0 \end{cases} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{9}$$

Поскольку $\det\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & R_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то условие (10) равносильно тому, что $\varphi_0(z) = 0$ и $\varphi_1(z) = 0$, т.е.

$$F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z} \quad \varphi_1(z) \equiv 0.$$

Таким образом, доказано утверждение.

Теорема 1. Если бианалитическая функция обращается в ноль на двух концентрических окружностях, то она тождественный ноль.

Доказанное утверждение – один из возможных аналогов теоремы единственности для аналитических функций на классе бианалитических функций.

3. Основные задачи плоской теории упругости на двух контурах

В данном пункте постараемся найти применение Теоремы 1 в задачах теории упругости.

Предположим, что однородное изотропное тело занимает область *D*, представляющую собой внутренность единичного круга. Положим также, что на контуре *L* известна всего одна составляющая внешних усилий, прикладываемых к телу, например Y_n.

Требуется определить деформацию тела. Очевидно, что в такой постановке задача имеет неоднозначное решение. Граничное условие в данном случае имеет вид:

$$\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1\varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1) =$$
$$= \overline{\left[\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1\varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1)\right]} + g_1(t_1),$$
$$t_1 \in L_1 .$$

Предположим, что нагрузку Y_n удалось определить не только на внешнем контуре L_1, но и на контуре L_2 $(L_2 : t_2 \in L_2 \Rightarrow \ t_2 \cdot \overline{t_2} = R_2^2, \ \ 0 < R_2 < 1)$, который можно мысленно вырезать в единичном круге. В этом случае получим следующую систему:

$$\begin{aligned} &\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1\varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1) = \\ &= \overline{\left[\varphi_0'(t_1) + \bar{t}_1\varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_1)\right]} + g_1(t_1) \\ &\varphi_0'(t_2) + \bar{t}_2\varphi_1'(t_2) + \varphi_1(t_2) = \\ &= \overline{\left[\varphi_0'(t_2) + \bar{t}_2\varphi_1'(t_1) + \varphi_1(t_2)\right]} + g_2(t_2) \end{aligned} \qquad (10)$$

Положим: $\varphi_0(0) = 0, \quad \varphi_1(0) = 0$.

Для того, чтобы доказать, что система уравнений (11) однозначно определяет бианалитическую функцию и, следовательно, напряжённое состояние тела, докажем, что соответствующая однородная система имеет только тривиальное решение. Для этого используем теорию краевых задач для аналитических функций.

Рассмотрим следующие аналитические функции:

$$\begin{aligned} \Phi_1^+(z) &= \varphi_0'(z)\cdot z + \varphi_1'(z) + \varphi_1(z)\cdot z \\ \Phi_2^+(z) &= \varphi_0'(z)\cdot z + R_2^2\varphi_1'(z) + \varphi_1(z)\cdot z \end{aligned} \qquad (11)$$

Доопределим их на всю плоскость комплексного переменного по формулам:

$$\Phi_1^-(z) = \overline{\Phi_1^+\left(\frac{1}{z}\right)}, \quad \Phi_2^-(z) = \overline{\Phi_2^+\left(\frac{1}{z}\right)} \qquad (12)$$

Тогда однородная задача (11) примет вид:

$$\begin{cases} \Phi_1^+(t_2) = \Phi_1^-(t_1) \\ \Phi_2^-(t_2) = \Phi_2^-(t_2) \end{cases} \qquad (13)$$

Система (14) представляет собой две однородные задачи о скачке для аналитических функций. Данные задачи (см. [2]) имеют только тривиальное решение. Следовательно,

$$\begin{cases} \varphi_0'(z)\cdot z + \varphi_1'(z) + \varphi_1(z)\cdot z = 0 \\ \varphi_0'(z)\cdot z + R_2^2\varphi_1'(z) + \varphi_1(z)\cdot z = 0 \end{cases}$$

Отсюда,

$$\varphi_1'(z) = 0, \ \varphi_0'(z) = -\varphi_1(z) = \text{const} .$$

В силу начальных условий $F(z) = \varphi_0(z) + \bar{z} \ \ \varphi_1(z) \equiv 0$. Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Балк М.Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНИТИ / Сер. Совр. Проб. матем. Фунд. напр.- т.85- М: ВИНИТИ. 1991. - С. 187 - 246.
2. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи - М: Наука, 1977. - 640 с.
3. *Колосов Г.В.* Применение комплексной переменной к плоской задаче теории упругости. ГТТИ. Л – М., 1939. – 224 с.
4. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М.: Наука. 1966. - 707 с.
5. *Редкозубов С.А.. Юденков А.В.* Задача Карлемана для полианалитических функций в теории упругости для областей сложной формы // Проблемы механики деформируемых тел и горных пород. Сб. статей под ред. академика РАН А.Ю. Ишлинского, М.: Из-во МГГУ. 2001. – С. 263-270. ГИАБ

Коротко об авторах

Адигамов А.Э., Юденков А.В., Скородулина Е.Ю., Юденкова М.А. – Московский государственный горный университет.

Рецензент д-р физ.-мат. наук *Д.Д. Ивлев*.