© В.К. Балханов, З.И. Хажеева, 2007

УДК 550.341.2

В.К. Балханов, З.И. Хажеева

*ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДИФФУЗИИ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ В РЕЧНОМ ПОТОКЕ**

Дан графический метод построения изолиний равной концентрации загрязняющих веществ в стационарном речном потоке. Показано, что для определения положения источника загрязнения водной среды достаточно небольшое количество измерений.

Задача определения распределения загрязняющих веществ в речном потоке представляет интерес для оценки воздействия различного рода антропогенных и техногенных факторов на водную среду. Одним из методов выявления такого негативного экологического воздействия – исследование загрязняющих веществ в водных слоях. При этом одним из оценок условий загрязнения речных потоков является оконтуривание загрязненных участков. Количественные закономерности распространения различных загрязняющих субстанций в водной среде также необходимо для оценки воздействия хозяйственной деятельности на водный баланс в соответствии с природоохранными требованиями. В настоящей работе будет показано, как графическим способом можно строить изолинии равной концентрации загрязняющих веществ, появление которых в воде, например, обусловлено промышленными сбросами. Задача прогноза распространения в речном потоке загрязняющих субстанций можно сформулировать точно. Однако, наша цель: дать прозрачный геометрический метод решения задачи, позволяющий по небольшому количеству аналитических проб загрязненной воды в различных точках речного потока строить изолинии во всем водном пространстве. Ниже увидим, что метод позволяет определять и местоположение локального источника загрязнений, например, от притопленной сливной трубы. Для демонстрации общего метода задачу упростим, оставляя, однако, все прин-ципиальные моменты.

Аналитические решения

В общем виде вопрос о распределении загрязняющих веществ, привносимой извне в водный поток, в плане получения аналитического решения представляет сложную математическую задачу. Мы рассмотрим случай, когда посторонние вещества доставляются в водную среду из локального источника – сливной трубы, расположенного на берегу реки. Непосредственно вблизи слива располагается ближняя зона [1], в которой объем загрязняющих субстанций больше объема воды. При достаточном удалении от источника загрязнения рас-полагается дальняя зона, где концен-трация взвешенных веществ су-

*Работа частично поддержана грантами РФФИ №№: 05-01-97200, 05-02-97202, 05-05-97279.

щест-венно уменьшается по сравнению с плотностью воды. Это происходит как за счет турбулентного перемешивания, так и в результате осаждения загрязняющих веществ на берег и дно водоема. В дальней зоне размер ареала загрязнения оказывается значительно большим глубины реки. Поэтому для расчета изолиний оконтуривания загрязненных участков можно использовать двумерную модель. Поскольку плотность загрязняющих веществ в дальней зоне заметно меньше плотности воды, то для характеристики изолиний можно применить диффузионно–дрейфовое приближение. Оно связано с пренебрежением динамическими и инерционными эффектами относительно движения загрязняющих веществ в водной среде, а также взаимодействия этих компонент.

В согласии со сделанным выше приближением примем, что наличие загрязняющих веществ не влияет на скорость водного потока, а само течение является двумерным. Принятые предположения практически не отразятся на принципиальных моментах метода графического построения решения задачи, но заметно упростят наше изложение. Водный проток ограничим параллельными прямолинейными берегами шириной *H*. Ось *x* направим вдоль какого–либо берега, ось *y* – ортогональна обоим берегам. В начале координат поместим источник постоянного поступления загрязняющих веществ в поток. Источником может служить сливная труба. При такой постановке задачи скорость течения воды в реке в дальней зоне находится независимо от наличия в ней малой концентрации загрязняющих субстанций. Тогда скорость водного потока будет находиться из уравнения Навье-Стокса:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla)\ \vec{V} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \eta\ \nabla^2 \vec{V}.$$

Здесь используются стандартные обозначения: $\vec{V}$ - вектор скорости, ∇ - оператор Набла, ρ - плотность жидкости, η - вязкость. Для стационарного плоского медленного течения воды между двумя плоскими параллельными берегами вектор скорости имеет следующие компоненты: $\vec{V} = \left(V_x(y)\ ,0,\ 0\right)$, и уравнение Навье – Стокса принимает вид:

$$\frac{d^{\ 2}\ V_x}{d\ y^2} = \frac{\Delta P}{\eta\ \rho\ L}.$$

Здесь ΔP - перепад давления на длине L. Решая его с учетом естественных граничных условий – обращения в нуль скорости на берегах, получаем

$$V_x(y) = \frac{\Delta P}{2\ \eta\ \rho\ L} y(H - y). \qquad (1)$$

- известный параболический профиль.

Динамика загрязняющих веществ в дальней зоне описывается уравнением диффузии для концентрации *C*:

$$\frac{\partial\ C}{\partial\ t} = \frac{1}{2} D\ \nabla^2 C. \qquad (2)$$

Здесь *D* – коэффициент диффузии, его можно определить, например, наблюдая осаждение загрязняющих веществ в воде на дно сосуда. В ближней зоне, с учетом турбулентности, правая часть уравнения (1) заменяется на $\frac{1}{2}\nabla \cdot \left(D\ \nabla C\right)$, где D уже является функцией координат. Для точечного источника решение уравнения (2) на плоскости (*x, y*) имеет следующий вид:

$$C(t,x,y)=\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\ D\ t}\right]. \qquad (3)$$

Постоянный множитель не выписываем, им определяется скорость поступления загрязняющих веществ в водную среду. Изолинии $C = const$ будут представлять собой концентрические окружности с центром в начале координат.

Реально распространение загрязняющих веществ ограничено речными берегами. При наличие только одного берега решение уравнения (2) должно быть найдено в полупространстве. Во втором случае задача обычно решается методом изображений [2], которое дает следующее выражение для концентрации:

$$C(t,x,y)=\frac{1}{t}\left\{\exp\left[-\frac{x^2+y^2}{2\ D\ t}\right]+\right.$$

$$\left.+\exp\left[-\frac{x^2-y^2}{2\ D\ t}\right]\right\} \qquad (4)$$

Изолинии будут представлять собой отсеченные береговой линией пополам овалы с длинной осью вдоль направления *x* (о таких линиях дальше будем говорить как о полуовалах). При наличии второго берега, когда решение ищется в полосе шириной *H*, решение уравнения (2) представляется в виде суммы от бесконечного числа “изображений” источника слива загрязняющих веществ в начале координат. Для изолиний это приводит только к тому, что длинная ось полуовала еще больше увеличивается. Отметим, также, что решение (4) отвечает условию отсутствия потока примеси через боковую стенку: $\frac{\partial\ C}{\partial\ y}=0$.

При наличии течения концентрация загрязняющих веществ C подчиняется уравнению:

$$\frac{\partial\ C}{\partial\ t}+\vec{V}\cdot\nabla C=\frac{1}{2}D\ \nabla^2 C. \qquad (5)$$

Если $\vec{V}=(V_x=const\ ,0,\ 0)$, то уравнение (5) имеет следующее решение:

$$C(t,x,y)=\frac{1}{t}\exp\left[-\frac{(x-V_x\ t)^2+y^2}{2\ D\ t}\right]. \qquad (6)$$

Изолинии будут представлять собой те же концентрические окружности, что получаемые из уравнения (2), только снесенные по течению на расстояние $V_x\ t$. Заметим, что поскольку источник загрязняющих веществ действует постоянно, то в каждый момент времени в точке с координатами x, y концентрация загрязнения одна и та же.

Геометрическое решение

Изолинии концентрации от точечного источника загрязняющих веществ в свободном пространстве на плоскости изображаются концентрическими окружностями с общим центром *O* (рис. 1, *а*). Уравнение каждой окружности следует из (3): $x^2+y^2=R^2(t)$; элементарного выражения для $R(t)$ здесь и ниже не выписываем. Если распределение загрязняющих водоем субстанций ограничено полупространством, то изолинии будут изображаться полуовалом, большая ось которой направлена вдоль границы раздела (рис. 1, *б*). Уравнение полуовала будет определяться из трансцендентного относительно *x* и *y* уравнения (4). Наличие второго берега реки, когда загрязняющие вещества распределяются в ограниченной полосе пространства, в целом картины не меняет. Картина изолиний не изменится и в однородном по своему сечению потоке воды, когда $V_x = const$, изолинии только сместятся по течению и будут определяться

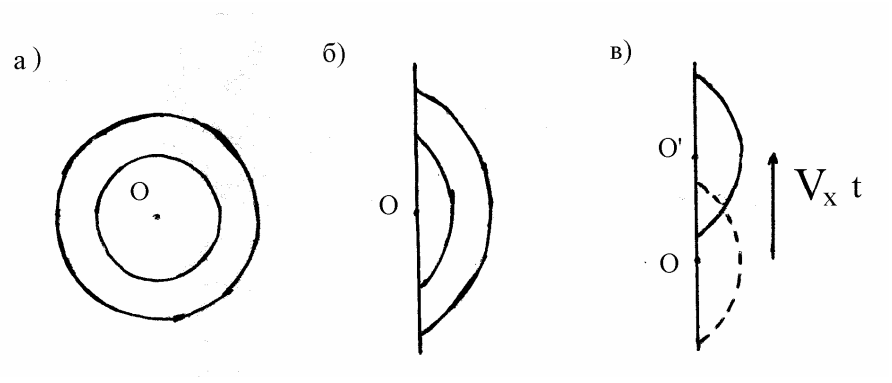

Рис. 1. а) – диффузия в свободном пространстве; б) – диффузия в полупространстве: в) – диффузия в однородном потоке среды

уравнением: $\left(x - V_x\, t\right)^2 + y^2 = R^2(t)$, рис. 1, *с*. Все точки полуовала рис. 1, *а* сместились по течению на расстояние $V_x\, t$, при этом центр *O* переместился в точку O'.

Как следует из решения (1), реально скорость течения воды в русловом канале шириной *H* имеют параболический профиль. Это связано с обычным гидродинамическим условием “прилипания” жидкости к твердым поверхностям. Подставляя профиль (1) в уравнение (5), получаем уравнение для концентрации загрязняющих веществ в потоке жидкости:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\Delta P}{2\,\eta\,\rho\,L}\cdot y(H-y)\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{2}D\left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}\right) \quad (7)$$

Несмотря на неразрешимость этого уравнения в квадратурах, легко построить его решение графически. Для этого надо только каждую точку полуовала на рис. 1, *в* снести по течению на расстояние $V_x(y)\, t$. Общая картина показана на рис. 2.

Определение положения источника

Проведя небольшое число измерений концентрации загрязняющих веществ в нескольких точках потока воды, в принципе становится возможным определение местоположения источника. Покажем, как это можно сделать в следующем приближении. Далеко от берега, достаточно и нескольких метров, преобладающим будет второе слагаемое в фигурных скобках решения (4). Перепишем его в следующем виде:

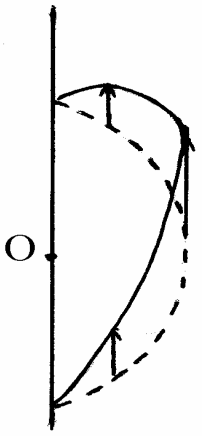

Рис. 2. Картина реальной диффузии загрязняющих веществ в неоднородном потоке водной среды

$$C = M \exp\left(-\frac{x^2 - y^2}{R^2}\right). \qquad (8)$$

Как следует из выражение (8), измеряя концентрацию в трех точках от берега, можно определить постоянные M, R^2 и x - положение источника. Например, если известны C_1 при y_1, C_2 при y_2 и C_3 при y_3, при этом x не меняется, то положение источника будет определяться из следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\left(x^2 - y_1^2\right) \ln\frac{M}{C_1} = \left(x^2 - y_2^2\right) \ln\frac{M}{C_2},$$

$$\left(x^2 - y_1^2\right) \ln\frac{M}{C_1} = \left(x^2 - y_3^2\right) \ln\frac{M}{C_3}.$$

Заключение

Уравнение (7) относительно концентрации C линейное, это позволяет развитый в данной статье графический метод построения изолиний равной концентрации распространить на любой протяженный источник загрязнений. Рассмотрение задачи о трехмерной динамике загрязняющих веществ в русловом потоке жидкости хотя и не представляет принципиальных трудностей, но требует трудоемких вычислений, при этом решение будет выражаться в виде суммы бесконечных рядов. Развитый графический метод без труда обобщается и на трехмерный случай, но это должно быть темой отдельной работы.

В настоящей работе не рассмотрен вопрос об оседании загрязняющих веществ на дно и берег реки. Такую задачу можно также решать указанным выше геометрическим методом, только переформулировав саму задачу на вероятностный язык, чтобы можно было учитывать вероятность того, что находясь на некотором расстояние от дна и берега загрязняющая примесь оседает на дно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипов Б.В., Котеров В.Н., Кочерова А.С., Солбаков В.В., Хубларян Г.М.* Расчет распространения взвешенных веществ в прибрежной области моря // Водные ресурсы, 2004. Т.31. № 1. С. 31-39.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика. – М.: Наука, 1988. 736 с. ГИАБ

Коротко об авторах

Балханов Василий Карлович – кандидат технических наук, Отдел физических проблем Бурятского научного центра Сибирского отделения РАН,

Хажеева Зинаида Ивановна – кандидат физико-математических наук, ст. научный сотрудник, Байкальский институт природопользования СО РАН.

Статья представлена Бурятским научным центром Сибирского отделения РАН.