© В.А. Миронов, О.Е. Софьин, 2007

УДК 622.011

В.А. Миронов, О.Е. Софьин

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПРОЧНОСТИ И ДЕФОРМИРУЕМОСТИ ДИСПЕРСНЫХ ПОРОД

Семинар № 4

В работе моделируется пластическое поведение дисперсных пород при сложном напряженном состоянии. Вводится понятие площадок скольжения, как площадок «истинного» проскальзывания физических частиц дилатирующей гранулированной среды. Применяя ассоциированный закон течения к пространственному условию предельного равновесия, выводятся формулы для определения ориентации площадок скольжения при произвольной («неассоциированной») дилатансии. Предлагается условие предельного течения сыпучей сплошной среды, согласно которому сила сопротивления среды отклоняется от площадки предельного равновесия и лежит в плоскости чисто тангенциального скольжения физических частиц. Формулируется правило, определяющее скорости пластической деформации. Расчеты по предлагаемой модели сравниваются с результатами экспериментальных исследований прочности и деформируемости дисперсных пород.

Условия предельного равновесия Мора-Кулона и Мизеса-Боткина являются наиболее применяемыми в механике сыпучих сред. Первое условие лучше соответствует экспериментальным данным, но крайне затруднительно в использовании из-за наличия на предельной поверхности сингулярных точек. Второе является удобным в применении, но предсказывает завышенное в сравнении с опытом влияние промежуточного главного напряжения σ_2 на прочность.

В последнее время получили распространение различные обобщения условия предельного равновесия Мора-Кулона, имеющие регулярную поверхность и основанные на учете вида напряженного состояния, например предложенное в работе [1]. В обобщениях такого рода вопрос о физическом объяснении влияния вида напряженного состояния на прочность сыпучих сред остается открытым.

Наиболее приемлемым с физической точки зрения является обобщение условия предельного равновесия Мора-Кулона на пространственный случай напряженного состояния следующего вида [2]:

$$\tau_\nu = \sigma_\nu \mathrm{tg}\varphi\,, \qquad (1)$$

где $$\sigma_\nu = \frac{3I_3}{I_2}, \tau_\nu = \sqrt{\frac{I_1 I_2 I_3 - 9I_3^2}{I_2^2}} \qquad (2)$$

нормальное и касательное напряжения на пространственной площадке предельного равновесия с нормалью ν, определяемой направляющими косинусами

$$l = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_1}},\ m = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_2}},\ n = \sqrt{\frac{I_3}{I_2\sigma_3}}\ ; \qquad (3)$$

$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$,

$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3$, $I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$ – инварианты тензора напряжений; $\sigma_i\left(i = 1,\ 2,\ 3\right)$ – главные напряжения (сжатию соответствует $\sigma_i > 0$); φ – эффективный угол внутреннего трения.

Предельная поверхность, соответствующая условию (1), в системе координат $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ имеет вид некруговой конической поверхности, описывающей пирамиду Мора-Кулона, с вершиной в начале координат. Таким образом, условие предельного равновесия (1) предсказывает одинаковые по прочности состояния при напряженных состояниях обобщенного сжатия ($\sigma_2 = \sigma_3$) и обобщенного растяжения ($\sigma_1 = \sigma_2$), и несколько повышенную прочность при промежуточных значениях σ_2.

Специально поставленные опыты по определению влияния вида напряженного состояния на прочность дисперсных пород [3] показали, что прочность при различных видах напряженного состояния, в том числе при сжатии и растяжении, различна. Оказалось, что влияние вида напряженного состояния на прочность зависит от плотности сложения дисперсной породы и траектории нагружения. По-видимому, это можно объяснить способностью дисперсных сред дилатировать, т.е. изменять объем при сдвиге.

Для различных состояний дисперсной породы по плотности дила-тансия может быть как отрицательной (разрыхление), так и положительной (уплотнение). Деформация разрыхления наблюдается при сдвиге пород плотного сложения при низких напряжениях или при напряжениях меньших чем те, которые привели ее к данной степени уплотнения. Сдвиг рыхлых пород характеризуется деформацией уплотнения. То есть для таких сред ассоциированный закон течения Мизеса [4] существенно не выполняется, а вектор приращения пластической деформации в общем случае не ортогонален предельной поверхности.

Пластическое деформирование сыпучих сплошных сред в макроточке происходит путем возникновения сдвигов на площадках с некоторой критической величиной касательных сил, которая зависит от нормальных сил. Если учесть природу реального дискретного материала, то может оказаться, что площадки предельного равновесия не являются самыми опасными, так как скольжение по ним требует пересечения большого числа частиц. Поэтому действительное скольжение будет происходить без пересечения физических частиц, обладающих значительно большей прочностью, чем прочность контакта.

Предположим, что сила сопротивления среды t отклоняется от площадки предельного равновесия ν и лежит в плоскости истинного проскальзывания частиц, уравновешивая напряжения, действующие на площадках предельного равновесия σ_ν и τ_ν.

Тогда уравнение предельного течения имеет вид [5]:

$$t = \mathrm{tg}\varphi_0 s, \qquad (4)$$

где

нормальная и касательная силы, действующие на площадке скольжения ν' и численно равные проекциям напряжений, действующих на площадках пре-

$$s = \sigma_1 ll' + \sigma_2 mm' + \sigma_3 nn',$$

$$t = \sqrt{\left(\sigma_1 lm' - \sigma_2 ml'\right)^2 + \left(\sigma_2 mn' - \sigma_3 nm'\right)^2 + \left(\sigma_3 nl' - \sigma_1 l\ \ n'\right)^2} \qquad (5)$$

дельного равновесия, соответственно на нормаль к площадке скольжения и на нее саму (рис. 1); φ_0 – истинный угол внутреннего трения; l', m', n' – направляющие косинусы нормали ν' площадки скольжения.

С математической точки зрения под площадкой скольжения подразумевается поверхность, на которой имеется или предполагается разрыв скорости при соблюдении условия, что нормальная компонента разрыва равна нулю [6].

Если к критически напряженной точке приложить приращения напря-жений $\mathrm{d}\sigma_i$, то вследствие малости этого приращения направления главных напряжений и связанных с ними площадок предельного равновесия не изменится. При этом тензоры напряжений и скоростей пластических деформации будут коаксиальными. Учитывая это и применяя к уравнению предельного равновесия (1) ассоциированный закон течения Мизеса, получим выражения для направляющих косинусов нормали площадки скольжения в виде:

$$\left.\begin{aligned} l' &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_2\dot{\varepsilon}_3 - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1J_3}}{\left(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2\right)\left(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_3\right)}},\ m' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_1\dot{\varepsilon}_3 - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1J_3}}{\left(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_1\right)\left(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3\right)}}, \\ n' &= \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{\frac{3\dot{\varepsilon}_1\dot{\varepsilon}_2 - J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1J_3}}{\left(\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1\right)\left(\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_2\right)}} \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где

$J_1 = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3$, $J_2 = \dot{\varepsilon}_1\dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_2\dot{\varepsilon}_3 + \dot{\varepsilon}_3\dot{\varepsilon}_1$,

$J_3 = \dot{\varepsilon}_1\dot{\varepsilon}_2\dot{\varepsilon}_3$ – инварианты тензора скоростей пластической деформации;

$\dot{\varepsilon}_i = \mathrm{d}\varepsilon_i^{\mathrm{p}} / \mathrm{d}t \left(i = 1,2,3\right)$ – главные скорости пластической деформации.

Будем считать, что если среда обладает хотя бы некоторой регулярной упаковкой, то ориентация площадки скольжения является функцией ориентации площадки предельного равновесия и дилатансии. Тогда формулы (6) будут справедливы и при произвольной дилатансии, так как направляющие косинусы выражены через скорости пластической деформации. Здесь существенно отметить, что лучшее согласие теории и эксперимента будет наблюдаться для дисперсных пород, состоящих из более твердых частиц, имеющих округлую форму.

Если среда пластически несжимаема ($\dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3 = 0$), то из выражений (6) следует, что площадка скольжения совпадает с октаэдрической площадкой ($l' = m' = n' = 1/\sqrt{3}$).

Из всего сказанного следует, что площадка скольжения в общем случае не совпадает с площадками предельного равновесия, а ее ориентация определяется деформированным состоянием среды.

Тангенциальная компонента скорости на площадке скольжения определяется выражением:

$$\dot{\gamma}_{\nu'} = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{-J_2 + \sqrt{J_2^2 - 3J_1J_3}}\ . \tag{7}$$

Условие дилатансии запишем в виде уравнения

$$\dot{\varepsilon} + \Lambda\dot{\gamma}_{\nu'} = 0\,, \tag{8}$$

где $\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 + \dot{\varepsilon}_3$ – скорость объемной пластической деформации, Λ – скорость дилатансии.

Оказывается, что ассоциированный с условием (1) закон течения соответствует скорости дилатансии $\Lambda = -(3/2)\mathrm{tg}\varphi$.

Предельная поверхность по уравнению (4) также в общем случае не совпадает с предельной поверхностью уравнения (1). Такое совпадение теоретически возможно в случае значительного дилатансионного уплотнения породы, когда $\Lambda = (3/2)\mathrm{tg}\varphi$ ($l' = l$, $m' = m$, $n' = n$) или стремится к ней, если $\Lambda \to -(3/2)\mathrm{tg}\varphi$. При $\Lambda = -(3/2)\mathrm{tg}\varphi$ в соответствии с излагаемой моделью истинный угол внутреннего трения φ_0 равен нулю, что возможно только для нереальной среды с отсутствием трения между частицами. Экспериментальные исследования [7] подтверждают, что «ассоциированная» дилатансия в опыте не наблюдается.

Определяющие связи будем искать в таком виде, чтобы после подстановки их в известные формулы

$$\left.\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_v &= \dot{\varepsilon}_1 l'^2 + \dot{\varepsilon}_2 m'^2 + \dot{\varepsilon}_1 n'^2, \\ \dot{\gamma}_v &= 2\sqrt{\left(\dot{\varepsilon}_1 - \dot{\varepsilon}_2\right)^2 l'^2 m'^2 + \left(\dot{\varepsilon}_2 - \dot{\varepsilon}_3\right)^2 m'^2 n'^2 + \left(\dot{\varepsilon}_3 - \dot{\varepsilon}_1\right)^2 n'^2 l'^2} \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

результат был тождественен выражениям (5). Такому результату удовлетворяют связи вида

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\lambda}\left(\frac{\sigma_1 l}{l'} - s\right),\ \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\lambda}\left(\frac{\sigma_2 m}{m'} - s\right),\ \dot{\varepsilon}_3 = \dot{\lambda}\left(\frac{\sigma_3 n}{n'} - s\right), \qquad (10)$$

где $\dot{\lambda} = \mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t$ – бесконечно малый скалярный множитель ($\dot{\lambda} > 0$).

Из соотношений (10) следует, что тензоры скоростей пластических деформаций и напряжений не пропорциональны, что затрудняет их использование. Однако полученные связи весьма важны для правильной интерпретации результатов опытов и оценки констант теоретических моделей сыпучих сред. Соотношения (10) существенно упрощаются при рассмотрении пластически несжимаемой среды.

Проведем сравнительный анализ предлагаемой модели с известными условиями предельного равновесия Мора-Кулона, Треска-Хила, Мизеса-Боткина. Для этого введем обозначения

$$\xi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2},\ \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \qquad (11)$$

Выражая предельные условия через параметры $\eta/\xi = K_{\mathrm{M}}$ и параметр Лоде $\mu_\sigma = \left(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3\right)/\left(\sigma_1 - \sigma_3\right)$, получим уравнения [8] Мора-Кулона

$$\frac{\eta}{\xi} = \sqrt{\frac{K_{\mathrm{M}}^2}{1 + K_{\mathrm{M}}^2}} = K_{\mathrm{M}}, \qquad (12)$$

Треска-Хилла

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{3K_{\mathrm{T}}}{6\text{-}\mu_\sigma K_{\mathrm{T}}}, \qquad (13)$$

Мизеса-Боткина

$$\frac{\eta}{\xi} = \frac{\left(\mu_\sigma K_{\text{окт}} + \sqrt{2\mu_\sigma^2 + 6}\right)K_{\text{окт}}}{\left(2 - K_{\text{окт}}^2\right)\mu_\sigma^2/3 + 2}, \qquad (14)$$

условия предельного равновесия (1)

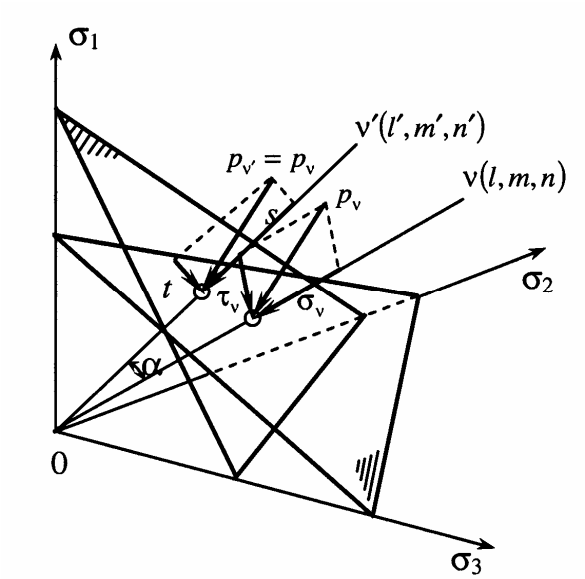

Рис. 1. Площадки предельного равновесия и скольжения

условия предельного течения пластически несжимаемой среды (4)

$$\left(\sqrt{1+\frac{\eta}{\xi}}-\sqrt{\mu_\sigma\frac{\eta}{\xi}+1}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt{\mu_\sigma\frac{\eta}{\xi}+1}-\sqrt{1-\frac{\eta}{\xi}}\right)^2+$$
$$+\left(\sqrt{1-\frac{\eta}{\xi}}-\sqrt{1+\frac{\eta}{\xi}}\right)^2= \qquad (16)$$
$$=K_0^2\left(\sqrt{1+\frac{\eta}{\xi}}+\sqrt{\mu_\sigma\frac{\eta}{\xi}+1}+\sqrt{1-\frac{\eta}{\xi}}\right),$$

$$\frac{\left(3+\mu_\sigma\frac{\eta}{\xi}\right)\left[2\left(\mu_\sigma\frac{\eta}{\xi}-\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2+3\right)\right]}{9\left(1-\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2\right)\left(\mu_\sigma\frac{\eta}{\xi}+1\right)}-1=K_\nu^2, \qquad (15)$$

где $K_М$, $K_Т$, $K_{окт}$, K_ν – эффективные коэффициенты трения; K_0 – истинный коэффициент трения.

Значения теоретически прогнозируемых углов внутреннего трения, по Мору-Кулону, в зависимости от параметра μσ в сопоставлении с экспери-

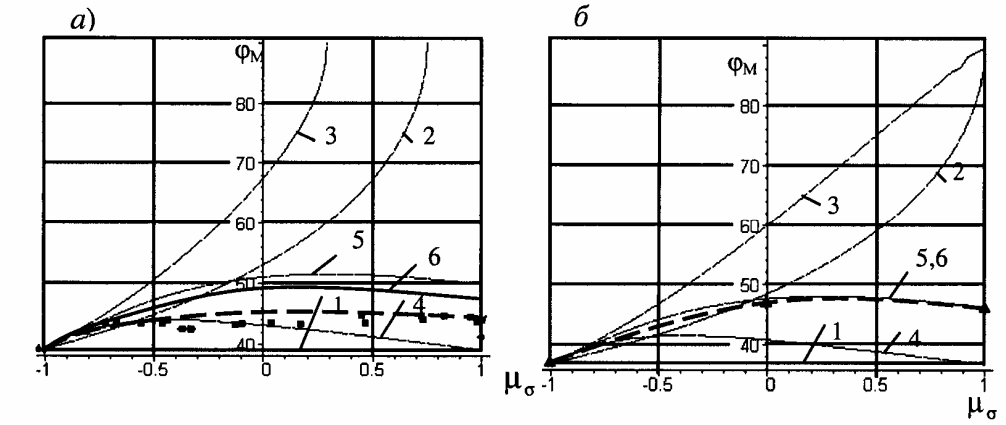

Рис. 2. Теоретические и экспериментальные зависимости угла внутреннего трения от параметра μ_σ, по Мору-Кулону: а) Опыты Грина и Бишопа (плотный песок из р. Хэм, коэффициент пористости e_0 = 0,64); б) Опыты Ломизе и Крыжановского (кварцевый волжский пылеватый однородный песок, e_0 = 0,73): *1* – условие Мора-Кулона; *2* – условие Треска-Хила; *3* – Мизеса-Боткина; *4* – обобщенное условие (1), *5* – условие предельного течения (4) в предположении пластической несжимаемости среды; *6* – условие предельного течения (4) с учетом дилатансии среды, точки – эксперимент

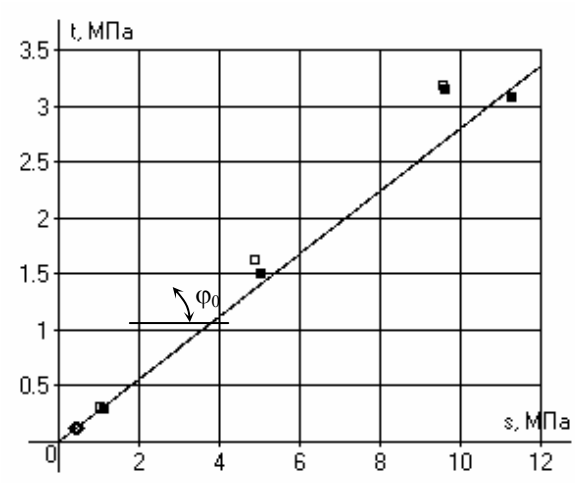

Рис. 3. Зависимость нормальной su касательной t компонент на площадке скольжения (песок из р. Хэм)

ментальными данными по определению пиковой прочности песков, полученными Грином и Бишопом [9], Ломизе и Крыжановским [10] представлены на рис. 1.

Из графиков видно, что промежуточное главное напряжение σ_2 влияет на прочность дисперсных пород. Условия предельного равновесия Треска-Хила и Мизеса-Ботки-на дают завышенные значения прочности, а условие Мора-Кулона вообще исключает влияние на прочность σ_2. Значения углов внутреннего трения, полученные по предлагаемой модели, хорошо согласуются с опытными значениями Ломизе и Крыжановского и несколько хуже с данными Грина и Бишопа. На наш взгляд причина этого факта деформационная анизотропия упрочнения, влияние которой значительнее проявляется в опытах Грина и Бишопа. В этих опытах нагружение осуществлялось при σ_2 = const и σ_3 = const и возрастающей деформации ε_1 (в направлении σ_1). При этом реализовывалась траектории со значительным ростом среднего напряжения. В опытах Ломизе и Крыжановкого в основном реализовывались траектории по девиаторной (среднее напряжение постоянно) или близких к ней схемах.

В заключении рассмотрим серию опытов на трехосное сжатие с дренажем насыщенного песка из реки Хэм, выполненную Грином и Скиннером [9]. Опыты проводились при различных значениях начальной пористости песка и величине бокового обжатия, сохраняемого постоянным в процессе всего опыта. Согласно эти опытам разрыхлению соответствует большее значение эффективного угла внутреннего трения, по Мору-Кулону, уплотнению – меньшее значение φ_M. Обработка опытных данных по уравнению (4) привела к единому значению угла внутреннего трения φ_0 = 16° (рис. 3), что дает возможность принимать его за истинный угол внутреннего трения среды. То же значение φ_0 получено и при обработке опытов Ломизе и Крыжановского.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гениев Г.А.* К вопросу обобщения условий предельного равновесия сыпучей среды/ Основания, фундаменты и механика грунтов, 1968. № 2. С. 1-2.

2. *Nakai T., Matsuoka H.* Soils and Foundations, 1983, vol. 23, № 2. p. 26-42.

3. *Крыжановский А.Л., Вильгельм Ю.С., Медведев С.В.* Определения угла трения грун-

тов в приборах трехосного сжатия и срезных приборах/ Основания, фундаменты и механика грунтов, 1985. № 3. С. 20-23.

4. *Ивлев Д.Д.* О диссипативной функции в теории пластических сред/ В кн.: Механика пластических сред. М.: Физматлит, 2001. Т. 1. С. 29-33.

5. *Миронов В.А, Софьин О.Е.* Модель предельного течения дилатирующих грунтов при сложном напряженном состоянии/ Будаўніцтва. Строительство. Construction. Мн.: БНТУ, 2003. № 1 - 2. С. 71-75.

6. *Томас Т.* Пластическое течение и разрушение в твердых телах. М.: Мир, 1964. 308 с.

7. *Николаевский В.Н.* Механические свойства грунтов и теория пластичности/ В кн.: Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел. М., 1972. Т. 6. 87 с.

8. *Софьин О.Е.* Результаты теоретико-экспериментального анализа моделей прочности грунтов/ Академические чтения Н.А. Цытовича и 2-е Денисовские чтения. М.: МГСУ, 2003. С. 84-88.

9. *Бишоп А.У.* Параметры прочности при сдвиге ненарушенных и перемятых образцов грунта/ В кн.: Определяющие законы механики грунтов. Механика. Новое зарубежное в науке. М.: Мир, 1975. № 2. С. 7-75.

10. *Ломизе Г.М., Крыжановский А.Л.* Основные зависимости напряженного состояния и прочности песчаных грунтов/ Основания, фундаменты и механика грунтов, 1966. № 3. С. 8-11. ГИАБ

Коротко об авторах

Миронов В.А., Софьин О.Е. – Тверской государственный технический университет.

Доклад рекомендован к опубликованию семинаром № 4 симпозиума «Неделя горняка-2007».
Рецензент д-р техн. наук, проф. *С.А. Гончаров.*

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	Название работы	Специальность	Ученая степень
ИНСТИТУТ ЦВЕТНЫХ МЕТАЛЛОВ И ЗОЛОТА ФГОУ ВПО СИБИРСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА			
НАЗАРОВА Евгения Юрьевна	Обоснование технологии разработки месторождений карбонатных пород вблизи селитебных территорий	25.00.22	к.т.н.