© А.В. Дугарцыренов, 2006

УДК 622.233:622

А.В. Дугарцыренов

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ГОРНОЙ ПОРОДЫ ПРИ ДЕФОРМАЦИИ ВКЛЮЧЕНИЙ (ЗЕРЕН И ПОЛОСТЕЙ)

В обширном ряде приложений, связанных с расчетом напряженного состояния упругой среды (матрицы) со сферической или цилиндрической полостями, подверженными действию постоянного давления, используется решение Ламе [1]. Однако давление на границе полости на практике обычно изменяется по мере расширения последней [2]. Учет такого расширения позволяет дать более корректное решение данной задачи. В общем случае рассматриваемую задачу можно представить, как полость в среде, находящуюся под действием газового, жидкого или твердого упругого включения (зерна). Тогда к этой задаче можно свести совместную деформацию зерна и матрицы при различного рода физических воздействиях (нагреве, магнитострикции, пьезоэффекте и др.) и оценить напряжения вблизи их контакта, взрыв заряда взрывчатого вещества (ВВ) в горной породе, разрушение горной породы при фазовых переходах жидких и твердых включений и т.д.

Общий подход к такой задаче заключается в отдельном рассмотрении деформации полости в матрице и возникающем при этом поле напряжений. Далее рассматривается деформация включения, обусловленная конкретными физическими явлениями. Поскольку здесь в силу симметрии имеет место только радиальная деформация, на последующем этапе достаточно привести к одинаковой величине равновесные давления на контакте и радиусы включения и полости.

Пусть в упругой изотропной бесконечной среде (индекс «1») находится сферическое (индекс «sf») или цилиндрическое (индекс «sl») включение (индекс «2») с начальным радиусом r_0. В результате внешнего воздействия (взрыва, нагрева, фазового перехода и др.) радиус включения и соответственно полости в матрице изменяются от r_0 до равновесного значения $r_{1;2}$. При этом на их границе действует давление $p_{1;2}$. Напряженное состояние матрицы определяется выражениями [2]:

$$\sigma_{sf.r} = -p_{1;2}\frac{1}{\bar{r}^3};\ \sigma_{sf.\varphi} = \sigma_{sf.\psi} = p_{1;2}\frac{1}{2\bar{r}^3},$$

$$\sigma_{sl.r} = -p_{1;2}\frac{1}{\bar{r}^2};\ \sigma_{sl.\varphi} = p_{1;2}\frac{1}{\bar{r}^2};\ \sigma_{sl.z} = 0. \qquad (1)$$

где σ_r, σ_φ и σ_ψ - соответственно радиальные, полярные и азимутальные напряжения; $\bar{r} = r / r_{1;2}$ ($r \ge r_{1;2} \Leftrightarrow \bar{r} \ge 1$) - относительная координата точки среды.

Перемещение $u_{1;2}$ границы сферической и цилиндрической полостей в матрице и контактное давление $p_{1;2}$ можно выразить единой формулой, записываемой в виде

$$u_{1;2} = \frac{p_{1;2}(1+\nu_1)r_0}{nE_1} \Leftrightarrow p_{1;2} = \frac{nE_1}{(1+\nu_1)r_0} u_{1;2},$$

где ν_1 и E_1 - коэффициент Пуассона и модуль упругости среды; $n = 2$ и $n = 1$ соответственно в случае сферической и цилиндрической полостей. Перемещения точек матрицы находятся из выражений:

$$u_{sf.r} = u_{1;2}\frac{1}{r^2};\ u_{sl.r} = u_{1;2}\frac{1}{r}. \qquad (2)$$

Взаимосвязь равновесной координаты $r_{1;2}$ границы полости и действующего на нее давления $p_{1;2}$ может быть выражена для матрицы в виде

$$r_{1;2} = f_1(p_{1;2}) = r_0\left[1 + \frac{p_{1;2}(1+\nu_1)}{nE_1}\right] \Leftrightarrow p_{1;2} =$$

$$= g_1(r_{1;2}) = \frac{nE_1}{1+\nu_1}\left(\frac{r_{1;2}}{r_0} - 1\right) \qquad (3)$$

Представим зависимость радиуса $r_{2;1}$ включения от давления $p_{2;1}$ на его поверхность выражением

$$r_{2;1} = f_2(p_{2;1}) \Leftrightarrow p_{2;1} = g_2(r_{2;1}).$$

Тогда, равновесие в системе «включение – среда» выполняется при условиях

$$p_{1;2} = p_{2;1} \Leftrightarrow g_1(r_{1;2}) = g_2(r_{2;1});\ r_{1;2} = r_{2;1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f_1(p_{1;2}) = f_2(p_{2;1}) \Leftrightarrow r_{1;2} + u_{1;2} = R_2 - u_{2;1}, \qquad (4)$$

где R_2 - радиус включения при $p_{2;1} = 0$; $u_{2;1}$ - перемещение точек поверхности включения при сжатии.

При известной функции $f_2(p_{2;1})$ или $g_2(r_{2;1})$ соотношения (1 - 4) позволяют найти перемещения и напряжения в матрице. Рассмотрим применение данной схемы расчета на примере некоторых частных задач.

1. Включение – твердая среда с упругими постоянными ν_2 и E_2.

Равновесный радиус $r_{1;2}$ достигается здесь с одной стороны в результате расширения полости в матрице от первоначального радиуса r_0 до равновесного $r_{1;2}$, с другой – вследствие сжатия включения от R_2 до $r_{2;1}$ ($r_0 < r_{2;1} < R_2$).

Процесс деформирования считаем квазистатическим и адиабатическим. Тогда уравнение равновесия (4) с учетом (2) запишется в виде

$$r_{1;2} = r_0 + \frac{p_{1;2}(1+\nu_1)r_0}{nE_1} =$$

$$= R_2 - \frac{p_{1;2}(1+m\nu_2)(1-2\nu_2)R_2}{E_2} \qquad (5)$$

где $m = 0$ и $m = 1$ соответственно для шарового и цилиндрического включения.

Отсюда

$$p_{1;2} = \frac{nE_1 \cdot (R_2/r_0 - 1)}{(1+\nu_1)\left[MR_2/r_0 + 1\right]},\ r_{1;2} =$$

$$= \frac{(M+1)R_2}{MR_2/r_0 + 1}, \qquad (6)$$

где $M = \frac{(1+m\nu_2)(1-2\nu_2)}{1+\nu_1} \cdot \frac{nE_1}{E_2}$.

В частном случае, для шарового включения находим

$$M = \frac{1-2\nu_2}{1+\nu_1} \cdot \frac{2E_1}{E_2} \text{ и}$$

$$p_{1;2} = \frac{R_2 - r_0}{\frac{1-2\nu_2}{E_2} \cdot R_2 + \frac{1+\nu_1}{2E_1} r_0},$$

$$r_{1;2} = \frac{\left(\frac{1-2\nu_2}{E_2} + \frac{1+\nu_1}{2E_1}\right) R_2 r_0}{\frac{1-2\nu_2}{E_2} \cdot R_2 + \frac{1+\nu_1}{2E_1} r_0}.$$

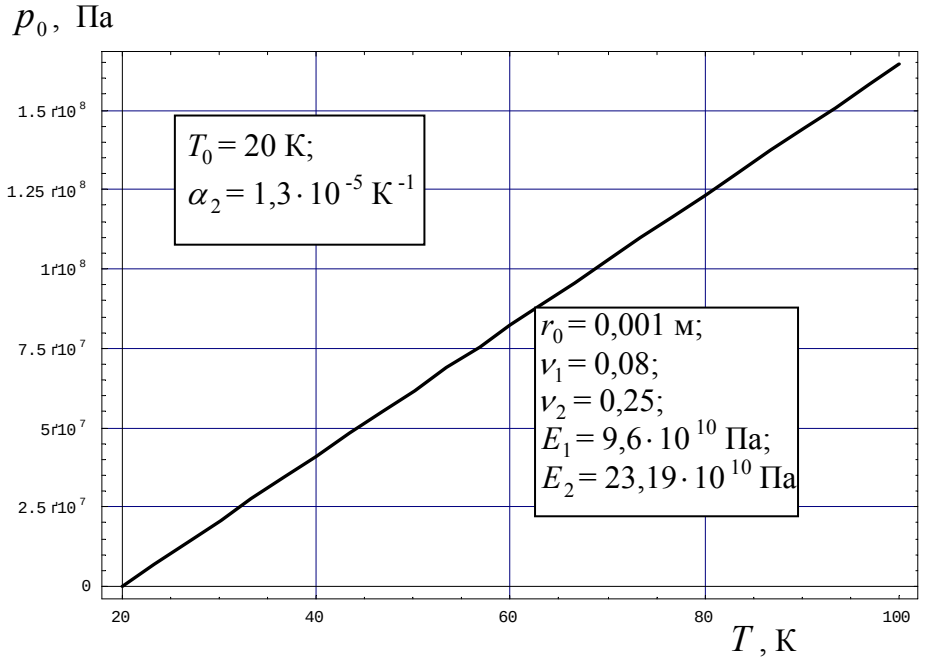

Рис. 1

Величина R_2 определяется из заданных физических воздействий на включение. Например, при тепловом расширении включения имеем

$$R_2 - r_0 = \alpha_2 (T - T_0) \cdot r_0 \Leftrightarrow R_2 = \\ = r_0 [1 + \alpha_2 (T - T_0)], \qquad (7)$$

где α_2 - коэффициент линейного теплового расширения включения; T и T_0 - соответственно текущая и начальная температура включения.

Тогда, для шарового включения получим выражение, ранее рассмотренное, как частный случай [3]:

$$p_{1;2} = \frac{\alpha_2 (T - T_0)}{\frac{1+\nu_1}{2E_1} + \frac{1-2\nu_2}{E_2}\left[1 + \alpha_2 (T - T_0)\right]}.$$

Напряжения в матрице определяются формулами (1) при подстановке в них давления $p_{1;2} = p_{2;1}$. Уравнения (1) определяют локальное поле напряжений в матрице вблизи включения. Напряжения во включении являются сжимающими и не зависят от координаты r :

$$\sigma_r = \sigma_\varphi = \sigma_\psi = -p_{1;2}. \qquad (8)$$

График зависимости контактного давления $p_{1;2}$ от текущей температуры для магнетитового шарового включения в матрице из кварца (железистый кварцит) при тепловом воздействии на него дан на рис. 1. Характер изменения напряжений в матрице по мере удаления от контакта представлен на рис. 2. Напряжения имеют локальный характер – на расстоянии 3-х радиусов r_0 их величины практически равны нулю. Максимальные растягивающие напряжения σ_φ достигаются на контакте магнетит-кварц и превышают по величине предел прочности кварца на растяжение.

Рассмотрим ту же систему «магнетит-кварц», в которой деформация

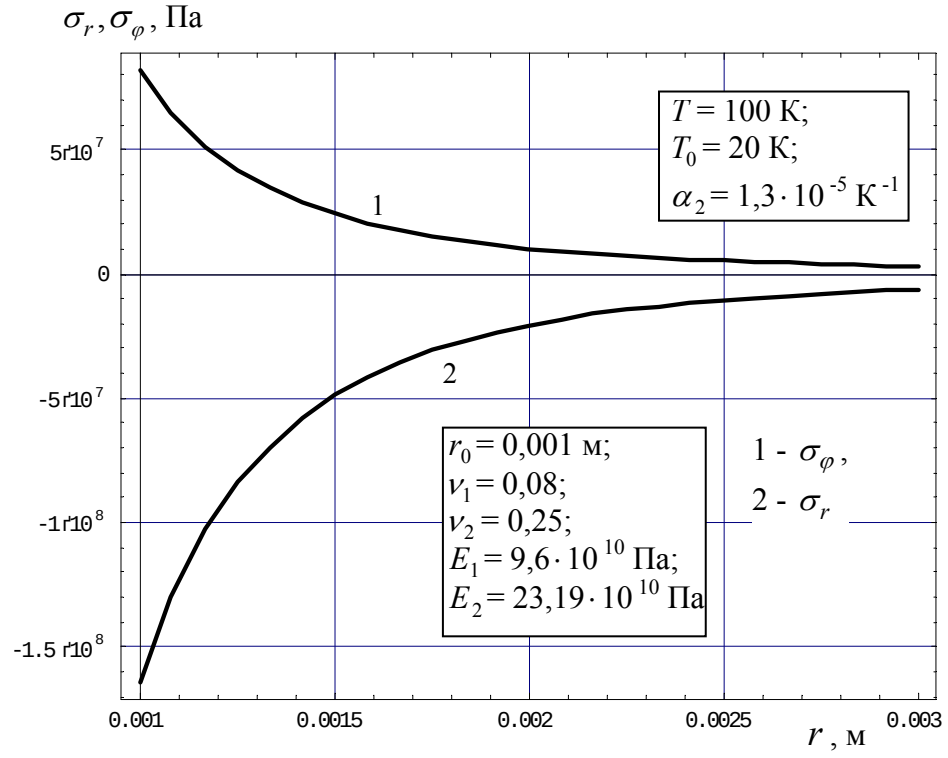

Рис. 2

включения шарового включения (магнетита) вызвана магнитострикционным эффектом. Максимальное относительное удлинение включения при магнитострикции составляет $\varepsilon_M \approx 40 \cdot 10^{-6}$ [4]. Отсюда, при свободном расширении включения получим

$$R_2 - r_0 = \varepsilon_M \cdot r_0 \Leftrightarrow R_2 = r_0 [1 + \varepsilon_M].$$

Подставляя полученные величины в выражение (6), находим в частности для шарового включения

$$p_{1;2} = \frac{\varepsilon_M}{\frac{1+\nu_1}{2E_1} + \frac{1-2\nu_2}{E_2}[1+\varepsilon_M]} = 5{,}1406 \cdot 10^6 \text{ Па}; \quad (9)$$

Расчет радиальных и полярных напряжений проводим по формулам (1) с учетом (9). Согласно (9) контактное давление относительно мало, поэтому и напряжения должны быть небольшими, что и подтверждают графики на рис. 3.

Максимальные растягивающие (полярные) напряжения в матрице реализуются на контакте включения и матрицы и достигают величины $2{,}57 \cdot 10^6$ Па или 26,21 кгс/см^2, что существенно меньше (примерно в 8 раз) предела прочности σ_p кварца на растяжение ($\sigma_p \approx 210 \cdot 10^5$ Па).

Приведенные примеры показывают, что использование эффекта магнитострикции для разупрочнения железистых кварцитов малоэффективно, в то же время разупрочнения можно достичь, применяя такие физические явления, которые приводят к нагреву

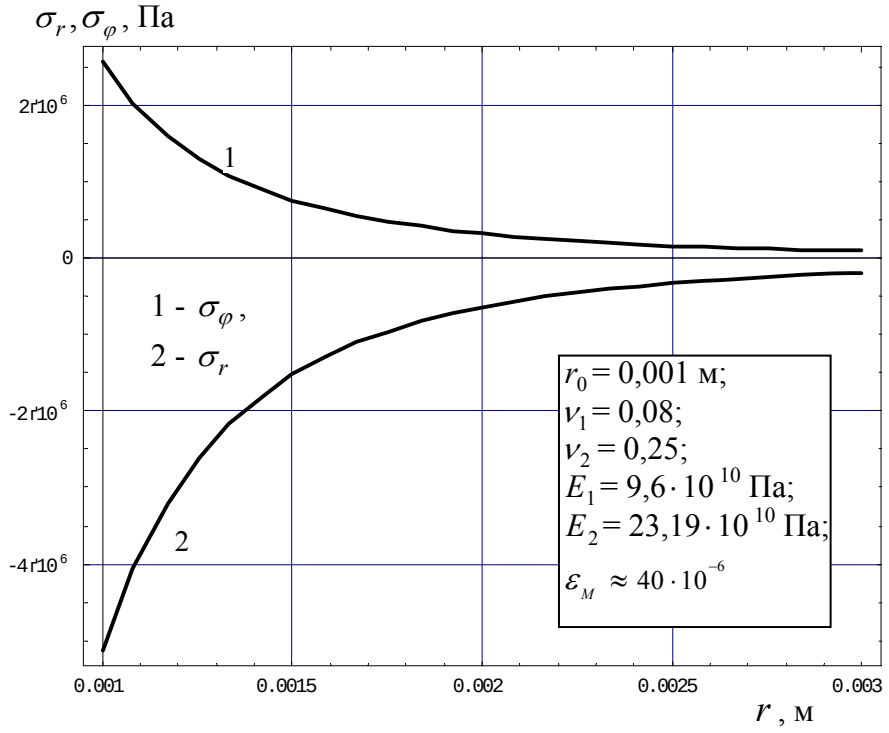

Рис. 3

включений в горной породе, например СВЧ нагрев.

2. Включение – газовая среда под давлением.

Газовое включение может иметь место, например, при взрыве заряда ВВ, заполняющего сферическую или цилиндрическую полость в горной породе (взрыв сосредоточенного или удлиненного зарядов ВВ). Пусть при взрыве в момент окончания детонации ВВ в полости радиуса r_0 в среде начальное давление газов равно p_0. Примем приближение совершенного газа. В результате адиабатического расширения (теплообменом газа со средой можно пренебречь в силу того, что равновесие устанавливается за десятки мкс) вследствие смещения границы полости давление газов снижается от p_0. до равновесной величины $p_{1;2}$.($p_{1;2}$.< p_0.), которое находим из выражения (закона Пуассона, определяющего параметры идеального газа в адиабатических процессах):

$$p_{1;2}V_{1;2}^{\gamma} = p_0 V_0^{\gamma} \Leftrightarrow p_{1;2} = \\ = p_0\left(\frac{r_0^{n+1}}{r_{1;2}^{n+1}}\right)^{\gamma} = p_0\left(\frac{r_0}{r_{1;2}}\right)^{(n+1)\gamma}, \qquad (10)$$

где γ - показатель политропы взрывных газов.

Наряду с этим, равновесное значение контактного давления с заданным приближением может быть найдено из разложения

$$p_{1;2} = p_0(1+\varepsilon)^{-(n+1)\gamma} = \\ = p_0\left[1-(n+1)\gamma\varepsilon + \left(\frac{(n+1)\gamma}{2} + \frac{(n+1)^2\gamma^2}{2}\right)\varepsilon^2 + \ldots\right], \qquad (11)$$

где $\varepsilon = u_{1;2}/r_0$ - относительное перемещение точек граничной поверхности.

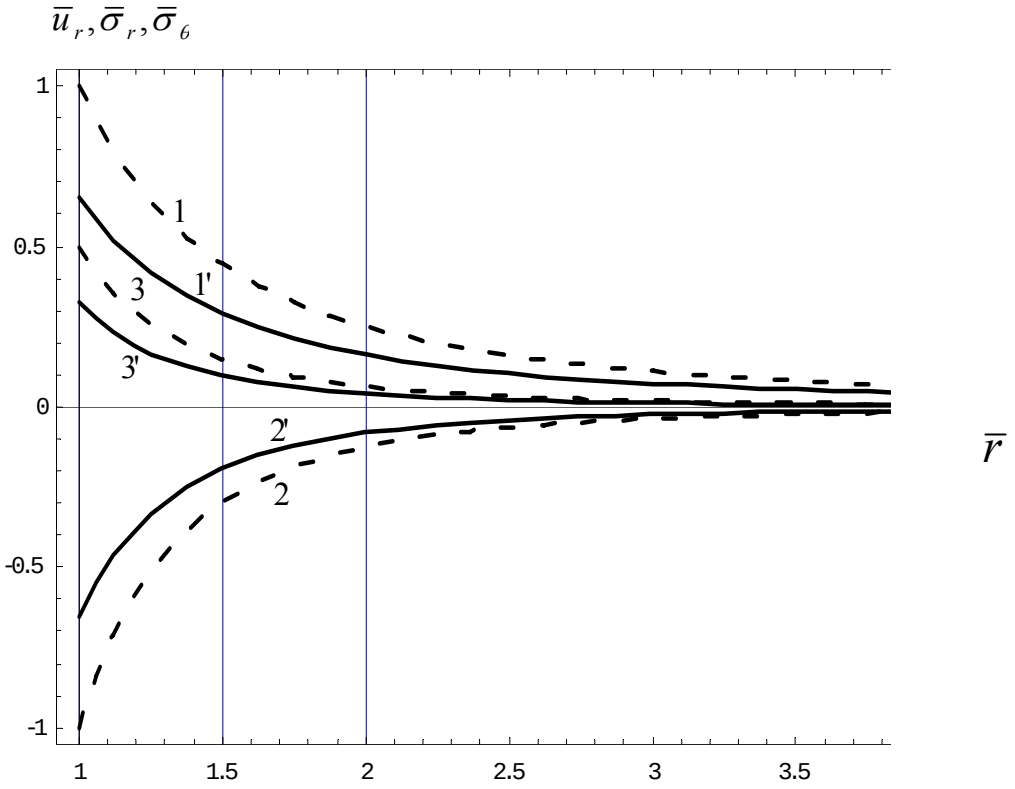

Рис. 4

Условие равновесия принимает вид

$$p_0\left(\frac{r_0}{r_{1;2}}\right)^{3\gamma} = \frac{nE_1\varepsilon}{1+\nu_1} \qquad (12)$$

В линейном приближении имеем

$$p_0\left[1-(n+1)\gamma\varepsilon\right] = \frac{nE_1\varepsilon}{1+\nu_1} \Leftrightarrow \varepsilon = \frac{p_0}{p_0(n+1)\gamma + \dfrac{nE_1}{1+\nu_1}}. \qquad (13)$$

Определяя равновесный радиус полости $r_{1;2}$ из трансцендентного уравнения (12) или (13) из равенств (2) и (1) можно найти равновесное давление $p_{1;2}$ и компоненты тензоров напряжения с учетом расширения полости. Например, из уравнения (13) находим

$$u_{1;2} = \frac{r_0}{(n+1)\gamma + \dfrac{n}{1+\nu_1}\cdot\dfrac{E_1}{p_0}}. \qquad (14)$$

Отсюда

$$r_{1;2} = r_0 + u_{1;2} = r_0\left[1 + \frac{(1+\nu_1)p_0}{nE_1 + (n+1)(1+\nu_1)\gamma p_0}\right];$$

$$\bar{u}_{1;2} = \frac{u_{1;2}}{u_0} = \frac{nE_1}{nE_1 + (n+1)(1+\nu_1)\gamma p_0};$$

$$p_{1;2} = \frac{p_0 nE_1}{nE_1 + (n+1)(1+\nu_1)\gamma p_0}. \qquad (15)$$

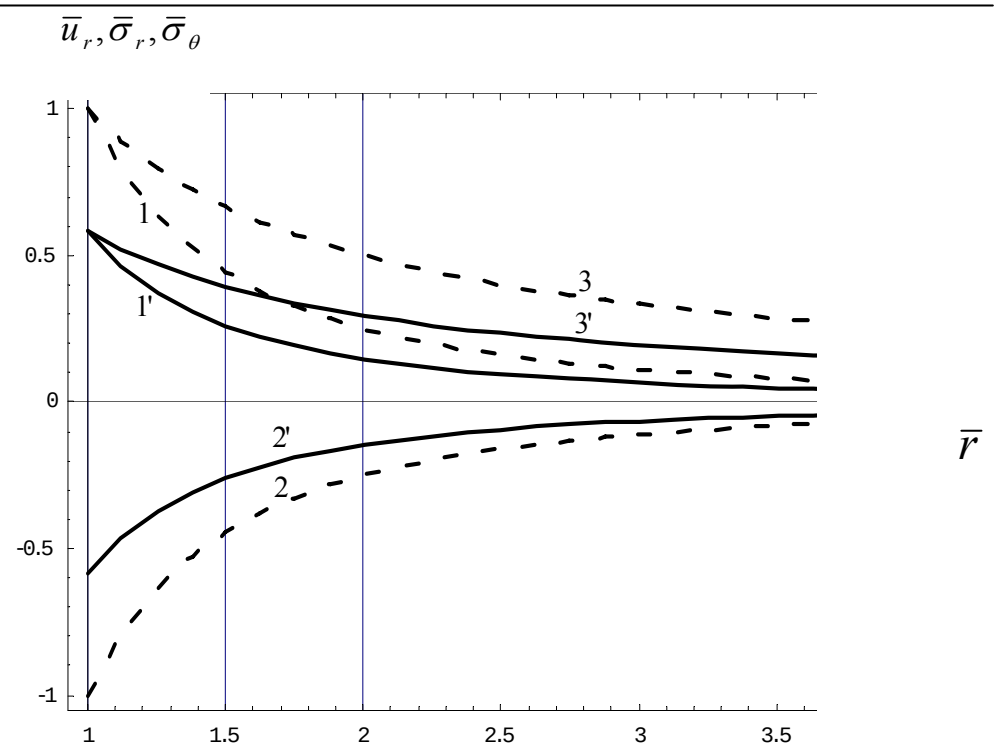

Рис. 5

Расчеты для газового включения, формируемого при взрыве сосредоточенного и удлиненного зарядов ВВ, проведены применительно к взрыву заряда граммонита 79/21 ($p_0 = 6{,}8 \cdot 10^9$ Па, $\gamma = 2{,}8$) в граните ($\nu_1 = 0{,}22$; $E_1 = 6{,}6 \cdot 10^{10}$ Па). Графики зависимостей $\overline{u}_r(\overline{r}) = u_r(\overline{r})/u_0$ (кривая 1), $\overline{\sigma}_r(\overline{r}) = \sigma_r(\overline{r})/p_0$ (кривая 2) и $\overline{\sigma}_\varphi(\overline{r}) = \sigma_\varphi(\overline{r})/p_0$ (кривая 3) для шарового и цилиндрического газового включения представлены соответственно на рис. 4 и 5 сплошными линиями, а графики тех же зависимостей, определенных без учета расширения полостей - пунктирными линиями.

Расчеты показывают, что величины равновесного давления для шарового и цилиндрического случая равны соответственно $p_{1;2} = 3{,}8903 \cdot 10^9$ Па и $p_{1;2} = 3{,}53448 \cdot 10^9$ Па, что составляет 57,21 % и 51,98 % от соответствующего начального давления p_0. При этом, величины перемещения и компонентов тензоров напряжений в точках среды при учете расширения сферической и цилиндрической полостей в граните соответственно примерно на 42,79 % и 48,02 % меньше аналогичных величин, соответствующих постоянному давлению взрывных газов.

Полученный результат показывает, что применение формул Ламе, не учи-

тывающих расширения включения, может привести к существенной погрешности.

Равновесные величины напряжений и деформаций являются асимптотическими значениями в соответствующих динамических задачах, что позволяет использовать их для оценки погрешности их решений.

Аналогичным образом могут быть проведены расчеты для других способов деформирования включения, если определена зависимость радиуса от давления на поверхности при его сжатии (растяжении).

Представленный в работе общий подход к описанию напряженного состояния горной породы (среды) при деформации различного рода включений в ней позволяет объединить в единую схему разнородные задачи и дать сравнительный анализ эффективности частных способов разупрочнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lame G.* Lecons sur La Theorie … de l'Elasticite, Paris. 1852.
2. *Крюков Г.М., Дугарцыренова Э.А., Дугарцыренов А.В.* Напряженное равновесное состояние среды с полостью с учетом ее расширения в линейном приближении. – Обозрение прикл. и промышл. матем., 2005, т.12, вып. 4, с. 1003-1004.
3. *Дугарцыренов А.В.* Оценка напряжений в матрице при деформации шарового включения. Горный информационно-аналитический бюллетень, №8. – М.: Изд-во МГГУ. – 2006. – С. 38-42.
4. *Сычев В.В.* Сложные термодинамические системы. – М.: Наука, 1980. 208 с.

Коротко об авторах

Дугарцыренов Аркадий Владимирович – кандидат технических наук, доцент кафедры «Физика горных пород», Московский государственный горный университет.

Д И С С Е Р Т А Ц И И

ТЕКУЩАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЗАЩИТАХ ДИССЕРТАЦИЙ ПО ГОРНОМУ ДЕЛУ И СМЕЖНЫМ ВОПРОСАМ

Автор	*Название работы*	*Специальность*	*Ученая степень*
ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ			
ХАДХИА ХАНДИ ХАИБА	Сравнительный анализ закономерностей размещения месторождений железа Западной Африки (Западная Сахара, Мавритания), Кольского полуострова и Си-	25.00.11	к.г.-мн.н.

	бири		